11/11/2020

Μετρικοί χώροι

Έστω $X \neq \emptyset$, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $d(x,y) \geq 0$, με ισότητα αν-ν $x=y$, $\forall x,y \in X$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Τότε, η d ονομάζεται μετρική στο X και το ζεύγος (X,d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Παραδείγματα: 1) $X = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$,

$$d_p(x,y) = \begin{cases} (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}, & p = \infty \end{cases}$$

π.χ. $d_p(x,y) = |x-y|$, αν $n=1$ $(X = \mathbb{R})$ και $d_2(x,y) =$ η ευκλείδια μετρική στον $\mathbb{R}^n$.

2) (X,d), $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ (διακριτή μετρική στο X)

Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Έστω $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\|x\| \geq 0$, με ισότητα αν-ν $x = 0$.
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$), $\forall x \in X$
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Τότε, η $\|\cdot\|$ ονομάζεται νόρμα στον X και το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ ονομάζεται χώρος με νόρμα.

<u>Π.χ.</u> $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, & p = \infty \end{cases}$

3) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Θεωρούμε την συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$, με τύπο $d(x,y) = \|x-y\|$. Τότε, το ζεύγος (X, d) είναι μ.χ.

Ορισμός: Έστω $\{x_n\} \subseteq X$. Λέμε ότι $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x (ως προς την μετρική d) ή $x_n \to x$ ή $\lim x_n = x$, αν $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Πρόταση: Αν το $\lim x_n$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω ότι $x_n \to x$ και $x_n \to y$, για κάποια $x, y \in X$. Τότε $d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \longrightarrow 0 \implies d(x,y) = 0 \implies x = y$ ☒

Ορισμοί: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος.
- Έστω $A \subseteq X$. Το A λέγεται φραγμένο αν $\exists x \in A$, $\exists M > 0$, τ.ω. $d(x,y) \leq M$, $\forall y \in A$. $\Longleftrightarrow$

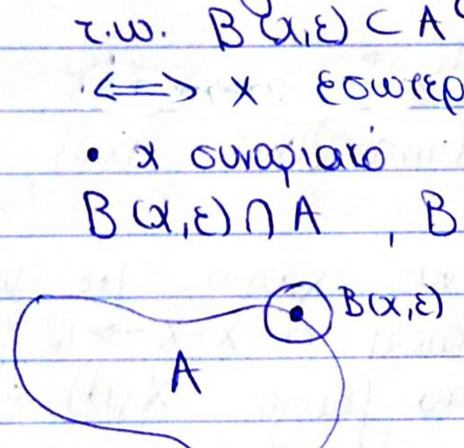
$\exists M' > 0$, τ.ω. $\forall x,y \in A$, $d(x,y) \leq M'$.

— Ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα $\varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) = B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$.

— Αν $A \subseteq X$, $A^c := X \setminus A$.

— Έστω $A \subseteq X$ και $x \in X$.

- x εσωτερικό σημείο του A, αν $\exists\, \varepsilon > 0$, τ.ω. $B(x,\varepsilon) \subseteq A$ (ειδικότερα, $x \in A$)
- x εξωτερικό σημείο του A, αν $\exists\, \varepsilon > 0$, τ.ω. $B(x,\varepsilon) \subset A^c$ (ειδικότερα, $x \in A^c$).
  $\Longleftrightarrow$ x εσωτερικό σημείο του A^c.
- x συνοριακό σημείο του A, αν $\forall \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A$, $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$
  $\Longleftrightarrow$ x δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό του A.



— Το σύνολο των εσωτερικών σημείων, των εξωτερικών, συνοριακών ονομάζεται εσωτερικό, εξωτερικό και σύνολο του A, αντίστοιχα.

<u>Συμβολισμός</u>: · $\mathring{A}$ ή $\text{int}A$ (εσωτερικό του A)
· $ex(A)$ (εξωτερικό του A)
· ∂A ή bdA (σύνορο του A).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A, F \subseteq X$. Το A ονομάζεται ανοικτό, αν $\mathring{A} = A$. $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in A$, $\exists\, r = r_x > 0$, τ.ω. $B(x,r) \subseteq A$.
Το F ονομάζεται κλειστό, αν F^c είναι ανοικτό.

Παραδείγματα: 1) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.
2) Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστό.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq X$. Η κλειστή θήκη του A ορίζεται ως εξής:

$$\bar{A} = \bigcap \{ C : C \supseteq A, \ C \text{ κλειστό} \}.$$

• Προφανώς, $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$.

Προτάσεις για ανοικτά και κλειστά σύνολα.

Πρόταση 1: Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{F_j\}_{j\in J}$ οικογένειες ανοικτών και κλειστών συνόλων αντίστοιχα. Ισχύουν τα εξής:

(i) $\emptyset, X$ είναι ανοικτά και κλειστά

(ii) $\bigcup_{i\in I} A_i$ ανοικτό.

(iii) $\bigcap_{i\in I} A_i$ ανοικτό, αν το I πεπερασμένο.

(iv) $\bigcap_{j\in J} F_j$ κλειστό

(v) $\bigcup_{j\in J} F_j$ κλειστό, αν το J είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη: (i) Τετριμμένο.

(ii) Έστω $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i \in I$ τ.ω. $x \in A_i$.

$\xRightarrow{A_i \text{ ανοικτό}} \exists \varepsilon > 0$, τ.ω. $B(x,\varepsilon) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

(iii) Αφού I πεπερασμένο, μπορούμε να γράψουμε $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, για κάποιο

$n\in\mathbb{N}$ και για κάποια ανοικτά $A_1,\dots,A_n$.

Έστω, $x\in\bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x\in A_i$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$

$\xRightarrow{A_i \text{ ανοικτά}}$ Για $i\in\{1,\dots,n\}$, $\exists \varepsilon_i>0$, τ.ω. $B(x,\varepsilon_i)\subseteq A_i$.

Θέτουμε $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\} \Rightarrow B(x,\varepsilon)\subseteq B(x,\varepsilon_i)$, $i=1,\dots,n$. $\Longrightarrow B(x,\varepsilon)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}B(x,\varepsilon_i)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}A_i$.

(iv) $\left(\bigcap_{j\in J} F_j\right)^c = \bigcup_{j\in J}(F_j)^c$, ανοικτό από το (ii), αφού F_j^c ανοικτό, $\forall j\in J \Rightarrow \bigcap_{j\in J} F_j$ κλειστό.

(v) $\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n}(F_j^c)$ ανοικτό, όπως πριν $\Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ κλειστό. $\boxtimes$

Παράδειγμα: $X=\mathbb{R}$, $\underbrace{\{A_i\}_{i\in I}}_{\supseteq[0,1]} = \{(0,1+\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ $\hookrightarrow$ ανοικτά

$\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,1+\frac{1}{n}\right)\supseteq(0,1]$.

Επίσης, έστω $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$.

Αν $x>1$, τότε $x=1+y$, για κάποιο $y>0$.
Αλλά, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\frac{1}{n_0}<y \Rightarrow$

$1+y\notin\left(0,1+\frac{1}{n_0}\right) \Longrightarrow x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$.

Άρα, $x\leq 1 \xRightarrow{x>0} x\in(0,1] \Rightarrow (0,1]\supseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$

$\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) = (0,1]$ δεν είναι ανοικτό σύνολο.

Επίσης, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[\left(0, 1+\frac{1}{n}\right)^c\right]}_{\text{κλειστά}}$ δεν είναι κλειστό.

<u>Πόρισμα της Πρότασης 1</u>: Έστω $A \subseteq X$. Τότε $\mathring{A}$ είναι το μεγαλύτερο (ως προς την σχέση του εγκλεισμού) ανοιχτό σύνολο που περιέχεται στο A και $\bar{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A. Επίσης, A κλειστό αν-ν $A=\bar{A}$.

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω $A \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) A κλειστό.

(ii) Για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}$ από το A, ισχύει $\lim x_n \in A$.

<u>Απόδειξη</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $\{x_n\} \subseteq A$, τ.ω. $x_n \to x \in X$. Αρκεί νδο $x \in A$.

Έστω $x \in A^c$, $\xRightarrow[\text{ανοικτό}]{A^c}$ $\exists\, \varepsilon > 0$, τ.ω.

$B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$.

Αλλά, $d(x_n,x) \to 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $d(x_{n_0},x) < \varepsilon \Longrightarrow x_{n_0} \in B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$, άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\forall \{x_n\} \subseteq A$, τ.ω. $\{x_n\}$ συγκλίνει, ισχύει ότι $\lim x_n \in A$.

Αρκεί νδο A^c ανοικτό.

Έστω $x \in A^c$. Αρκεί νδο $\exists \varepsilon > 0$, τ.ω. $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$. Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε, $\forall n \in \mathbb{N}$ $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq A^c \iff$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, τ.ω. $x_n \notin A^c$.
$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X$, τ.ω. $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ και $x_n \in A$.
Άρα, βρήκαμε ακολουθία $\{x_n\} \subseteq A$, τ.ω. $x_n \to x$ και $x \notin A$, άτοπο. ☒

<u>Πρόταση 3</u>: Έστω $A \subseteq X$. Τότε, $x \in \bar{A}$ αν-ν $\exists \{x_n\} \subseteq A$, τ.ω. $x_n \to x$.
<u>Απόδειξη</u>: ($\Longrightarrow$) $x \in \bar{A}$. Αν δεν υπάρχει $\{x_n\} \subseteq A$, τ.ω. $x_n \to x$, τότε $\exists \varepsilon > 0$, τ.ω. $\forall y \in A$, ισχύει $d(x,y) \geq \varepsilon \Longrightarrow B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$
$\Longrightarrow \bar{A} \setminus B(x,\varepsilon) = \bar{A} \cap B(x,\varepsilon)^c$ είναι κλειστό σύνολο που περιέχει το A, άτοπο, γιατί $\bar{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A, ενώ $A \subseteq \bar{A} \setminus B(x,\varepsilon) \subsetneq \bar{A}$.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\exists \{x_n\} \subseteq A$ τ.ω. $x_n \to x$. Θδο $x \in \bar{A}$. Έστω ότι $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in (\bar{A})^c$
$\xrightarrow{(\bar{A})^c \text{ ανοικτό}} \exists \varepsilon > 0$, τ.ω. $B(x,\varepsilon) \subseteq (\bar{A})^c \overset{A \subseteq \bar{A}}{\subseteq} A^c$

Όμως, $x_n \to x \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $d(x_{n_0}, x) < \varepsilon \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $x_{n_0} \in B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$.
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $x_{n_0} \in A^c$, άτοπο. ☒

Σημεία Συσσώρευσης

Ορισμός: Έστω $A \subseteq X$, $x \in X$. Το x ονομάζεται σημείο συσσώρευσης του A, αν $\forall \varepsilon > 0$,
$$(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$
Το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του A ονομάζεται παράγωγο σύνολο του A και συμβολίζεται με A'.
Αν $x \in A \setminus A'$, το x ονομάζεται απομονωμένο σημείο του A.

Πρόταση 4: (i) $x \in A'$ αν-ν $\exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$, τ.ω. $x_n \to x$.
(ii) $\overline{A} = A \cup A'$
(iii) Αν $x \in A'$, τότε $\forall \varepsilon > 0$, το σύνολο $B(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

Απόδειξη: (i) ($\Longrightarrow$) Έστω ότι $x \in A'$ $\Longrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(B(x, \frac{1}{n}) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, $x_n \neq x$ και $x_n \in A$.
$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in A \setminus \{x\}$, με $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$.

$\Longrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$, τ.ω. $x_n \to x$.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$, τ.ω. $x_n \to x$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $d(x_{n_0}, x) < \varepsilon$ $\Longrightarrow$ $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon)$ $\xRightarrow[x_{n_0} \neq x]{x_{n_0} \in A}$

$x_{n_0} \in (B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A$ $\Longrightarrow$

$$(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

(ii) Έστω $x \in A' \overset{(i)}{\Longrightarrow} \exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\} \subseteq A$
τ.ω. $x_n \to x$
$\xrightarrow{\text{Από Πρότ.3}}$ $x \in \overline{A}$.

Άρα, $A' \subseteq \overline{A}$. Επίσης, $A \subseteq A \Rightarrow$
$A \cup A' \subseteq \overline{A}$
Έστω $x \in \overline{A}$. Έστω $x \notin A$.
Τότε $\exists \{x_n\} \subseteq A$, τ.ω. $x_n \to x$
Αλλά, $x \notin A \Longrightarrow x_n \in A \setminus \{x\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
δηλ. $\exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$, τ.ω. $x_n \to x$.
$\overset{(i)}{\Longrightarrow} x \in A'$. Άρα, $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

(iii) Έστω $x \in A'$. Έστω $\varepsilon > 0$.
Αρκεί νδο $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο.
• Έστω ότι είναι πεπερασμένο (σίγουρα είναι μη κενό). Άρα, $\exists x_1, \dots, x_n \in X$ τ.ω.

$$(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \{x_1, \dots, x_n\}$$

• Θέτουμε $r := \min\{d(x,x_1), \dots, d(x,x_n)\} > 0$.

Τότε $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$, άτοπο. ▨

<u>Ορισμός</u>: Έστω $Y \subseteq X$. Y λέγεται πυκνό στον X αν $\overline{Y} = X$. Ο X λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο του X που είναι πυκνό στον X.
<u>Π.χ.</u>: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ πυκνά στον $\mathbb{R}$. (με την συνήθη μετρική).

Μετρικοί Υπόχωροι

Έστω (X,d) κ' $Y \subseteq X$. Ο μ.χ. (Y,d) ονομάζεται (μετρικός) υπόχωρος του X.

Πρόταση 5: Έστω $A \subseteq Y$. Το A είναι ανοικτό στον Y αν-ν $\exists B$ ανοικτό (αντιστοίχως κλειστό) στον X, τ.ω. $A = Y \cap B$.

Απόδειξη: • Έστω ότι $\exists B$ κλειστό στον X τ.ω. $A = Y \cap B$.
Έστω $\{x_n\}$ μία ακολουθία από το A, τ.ω. $x_n \to x \in Y$. Όμως, B κλειστό στον X $\xRightarrow{\text{Προτ. 2}}$ $\{x_n\} \subseteq B$

$x \in B \Rightarrow x \in Y \cap B \Rightarrow x \in A \xRightarrow{\text{Προτ. 2}} A$ κλειστό.